

Exercice 1 : Hyperboles de conjugaison

On considère une lentille mince convergente, notée \mathcal{L}_c de centre optique O et de distance focale image notée f'_c . La figure 1 (à rendre avec la copie) représente la position $\overline{OA'}$ de l'image que la lentille \mathcal{L}_c donne d'un objet de position \overline{OA} situé sur l'axe optique.

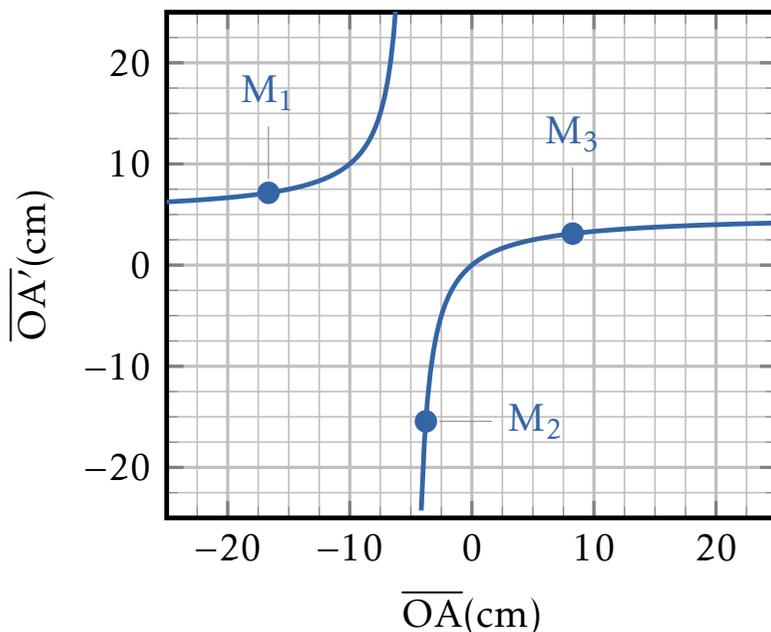


FIG. 1 : Position de l'image en fonction de celle de l'objet pour une lentille convergente.

- Déterminer à l'aide de la figure 1 la valeur de la distance focale f'_c .
 - Pour chacun des points M_1 , M_2 et M_3 , déterminer la nature réelle ou virtuelle de l'objet et de l'image correspondant.
- Proposer une détermination du grandissement transversal utilisant la figure 1.
 - En déduire le grandissement correspondant aux points M_1 et M_2 .
- On cherche avec cette lentille à former une image réelle deux fois plus grande d'un objet réel.
 - Quel sera le signe du grandissement ?
 - Déterminer à l'aide de la figure 1 la distance entre la lentille et l'objet ainsi que la distance entre l'objet et son image.

4. On considère une lentille mince divergente, de vergence $V = -10\delta$.

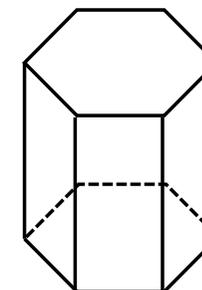
- Tracer l'allure de la courbe $\overline{OA'}$ en fonction de \overline{OA} en précisant soigneusement les points remarquables. On pourra se contenter de modifier quelques paramètres de la figure 1 et l'utiliser pour les questions suivantes.
- Cette lentille modélise le verre correcteur d'un œil myope. Où se forme l'image formée par ce verre d'un objet réel placé à 20 cm ?
- Avec ce verre, l'œil corrigé voit net sans accommoder un objet à l'infini. En déduire le « punctum remotum » de l'œil non corrigé.
- Le « punctum proximum » de l'œil non corrigé est 5 cm, quel est le « punctum proximum » de l'œil corrigé ?

Exercice 2 : Le petit halo

On étudie un phénomène d'optique atmosphérique.

Les cirrus sont des nuages peu épais, à structure filamenteuse, composés de petits cristaux de glace en forme de bâtonnets cylindriques, de section principale hexagonale régulière (voir la figure ci-contre). Les chocs qu'ils subissent avec les molécules d'air sont à l'origine d'un mouvement erratique : ils ont de la sorte toutes les orientations possibles dans l'espace.

On s'intéresse à des phénomènes optiques remarquables associés à ces cristaux. L'indice de la glace, noté n , est pris dans tout le spectre visible numériquement égal à 1,31.

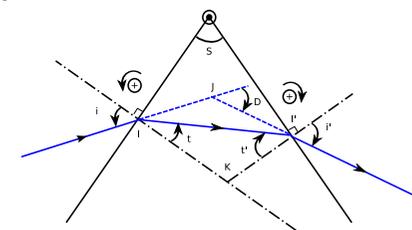


1. On considère le prisme de la figure ci-contre, d'angle au sommet S , taillé dans un milieu d'indice n . Le rayon incident est inclus dans un plan de section principale (ie orthogonal à l'arête).

(a) Établir les relations reliant :

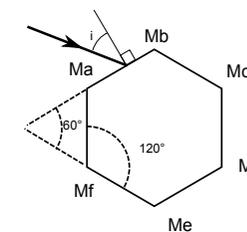
- S , t et t' d'une part,
- i et t , i' et t' d'autre part.

(b) En déduire qu'un rayon lumineux entrant sous incidence quelconque sur une face d'un prisme d'angle au sommet $S > 100^\circ$ et d'indice $n = 1,31$ ne peut pas émerger de l'autre face du prisme délimitant S .



2. On considère maintenant et dans toute la suite l'hexagone régulier $ABCDEF$ de la figure ci-contre. On considère la réfraction simple de rayons incidents d'incidence variable, appartenant à un plan de section principale entre A et B (on ne tient pas compte d'éventuelles réflexions internes).

Peut-il y avoir émergence par la face BC ? Que peut-on dire des rayons qui sortent par la face DE ?



3. (a) Exprimer la déviation D subie par le rayon entrant en AB sous l'incidence i (D et i définis sur la figure précédente) et sortant par la face CD en fonction de i , i' et S
- (b) Montrer que le rayon entrant en AB sous l'incidence i (définie sur la figure précédente) et sortant par la face CD présente une déviation D minimale pour $i = i'$ (D et i' sont définis sur la figure du prisme. L'observateur placé dans cette direction observera donc une accumulation de lumière, c'est-à-dire une *surintensité*.
- (c) i. Calculer la valeur numérique de l'angle i_0 correspondant à ce minimum de déviation.
ii. Calculer numériquement D_m .

4. En réalité l'indice optique de la glace décroît quand la longueur d'onde croît. Pour la glace, on a :

$$n(380 \text{ nm}) = 1,3215 \quad n(470 \text{ nm}) = 1,3145 \quad n(570 \text{ nm}) = 1,3103 \quad n(630 \text{ nm}) = 1,3085$$

La déviation est-elle plus importante pour le bleu ou le rouge ?

- (a) Plus précisément, on utilise le modèle de Cauchy :

$$n = n_0 + \frac{A}{\lambda^2}$$

Déterminer par régression linéaire les constantes n_0 et A .

- (b) En déduire la largeur angulaire du halo.
- (c) Calculer la valeur de la dérivée $\frac{dn}{d\lambda}$ en $\lambda = 470 \text{ nm}$ et en déduire, par un calcul d'incertitude-type, la variation de la déviation quand la longueur d'onde varie de $\pm 5 \text{ nm}$ autour de 470 nm .
5. (a) Établir, en le justifiant, un schéma illustrant le cône de l'espace qui apparaît lumineux à un observateur. On y fera figurer l'œil de l'observateur, la direction des rayons provenant du soleil et le cône.
- (b) Commenter les points communs et les différences avec le phénomène de l'arc-en-ciel.

Correction de l'exercice 1

1. (a) On observe que la distance $\overline{OA'}$ diverge pour $\overline{OA_0} = -5,0\text{cm}$. Le point A_0 est donc conjugué de l'infini, c'est donc par définition le foyer objet. On en déduit que $f' = 5,0\text{cm}$. On vérifie d'ailleurs que pour $OA = \infty$, $\overline{OA'} = 5,0\text{cm}$: le foyer image est bien symétrique du foyer objet.

(b) L'objet est réel (resp. virtuel) pour $\overline{OA} < 0$ (resp. pour $\overline{OA} > 0$). C'est l'inverse pour l'image. On en déduit que :

- en M_1 l'objet et l'image sont tous deux réels ; on est en zone de projection
- en M_2 l'objet est réel et l'image est virtuelle ; on est en zone de loupe
- en M_3 l'objet est virtuel et l'image est réelle.

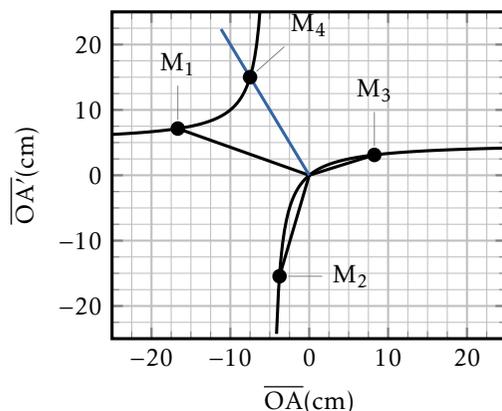


FIG. 2

2. (a) En notant $y = \overline{OA'}$ et $x = \overline{OA}$, le grandissement transversal a pour expression $\gamma = y/x$, c'est donc la pente de la droite joignant l'origine $x = 0, y = 0$ au point M , représentée sur la figure 2.

(b) On lit :

- en M_1 : $\gamma = -0,4$,
- en M_2 : $\gamma = 4,0$.

3. (a) On doit être en zone de projection, où $\gamma < 0$ puisque $\overline{OA} < 0$ et $\overline{OA'} > 0$.

(b) On trace la droite de pente $\gamma = -2$ issue de l'origine. Les coordonnées de son intersection avec la courbe de la figure 2 (point M_4) donnent :

- $\overline{OA} = -7,5\text{cm}$,
- $\overline{OA'} = 15\text{cm}$.

La distance entre la lentille et l'objet est donc $|\overline{OA}| = 7,5\text{cm}$ et celle entre l'objet et l'image est $AA' = \overline{OA'} - \overline{OA} = 22,5\text{cm}$. Remarquons que $D = AA'$ peut également s'interpréter graphiquement comme la distance, pour $x = -7,5\text{cm}$, entre la courbe de la figure 2 et la courbe d'équation $y = x$.

(a) La distance focale de la lentille est $f' = 1/V = -10\text{cm}$. Il suffit donc de décaler la courbe 1 pour que $\overline{OA'}$ diverge en $\overline{OA} = -f'$ et que ses asymptotes pour $\overline{OA} \rightarrow \pm\infty$ soient $\overline{OA'} = f'$. On obtient la courbe de la figure 3.

4.

(b) Le point M_1 sur la courbe, a pour abscisse $\overline{OA} = -20\text{cm}$. On lit son ordonnée $\overline{OA'} = -6,7\text{cm}$.

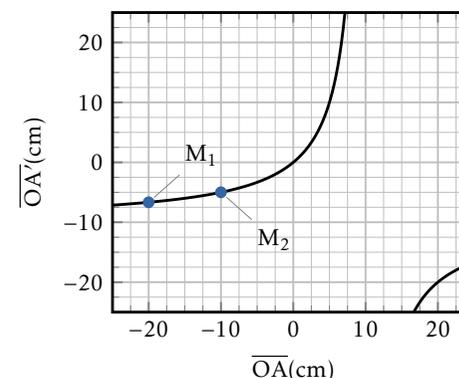


FIG. 3

(c) L'image d'un point à l'infini par cette lentille est son foyer image situé à l'asymptote $\overline{OA'} = f' = -10\text{cm}$. Comme l'œil voit cet objet sans accommoder, cette distance est son « punctum remotum » de l'œil non corrigé. On a ici négligé la distance entre l'œil et le verre.

(d) Quand il accommode au maximum, l'œil voit net un objet placé à son « punctum proximum » non corrigé, soit en $\overline{OA'} = -5\text{cm}$ (point M_2 sur la figure 3). Avec le verre, ce point est l'image du point $\overline{OA} = -10\text{cm}$; c'est donc le nouveau « punctum proximum » pour l'œil corrigé.

Correction de l'exercice 2

1. (a) Comme vu en cours : $S = t + t'$ (géométrie) et $\sin i = n \sin t$ et $\sin i' = n \sin t'$.

(b) La réflexion totale d'un rayon sur la face intérieure du prisme l'empêchera de sortir. Il faut pour cela que son incidence t' soit supérieure en valeur absolue à l'angle de réfraction limite $i_l = \arcsin \frac{1}{n} \approx 49,76^\circ$ ici. Or la valeur absolue minimale de t' d'un rayon atteignant la face de sortie est atteinte pour une incidence i de $+\pi/2$, pour laquelle $t = i_l$ et donc $t' = S - i_l = 50,24^\circ > i_l = 49,76^\circ$. Tout rayon atteignant la face inférieure sera totalement réfléchi.

2. Pour un rayon entrant par la face AB et sortant par la face adjacente BC , on est dans le cas d'un prisme d'angle $S = 120^\circ > 100^\circ$, la réflexion totale empêche les rayons d'émerger. Un rayon qui sort par la face diamétralement opposée n'est pas dévié puisqu'on a alors $t' = t$. Les seules trajectoires à considérer sont celles de rayons sortant par la troisième face.

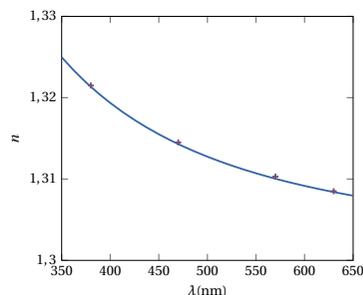
3. (a) On est ici dans le cas d'un prisme d'angle au sommet $S = 60^\circ$. Comme vu en cours, la déviation s'exprime selon : $D = i + i' - S$.

(b) On peut, comme vu en cours, chercher à annuler la dérivée de D par rapport à i mais un raisonnement plus direct est possible. Considérons que le rayon incident sur la face AB est à l'incidence i_0 réalisant le minimum D_m de déviation et notons i'_0 son incidence de sortie. Considérons maintenant une propagation du même rayon selon la même trajectoire grâce au principe du retour inverse. On a maintenant une incidence d'entrée de i'_0 et toujours la même déviation D_m à nouveau minimale. En admettant qu'une seule incidence d'entrée réalise ce minimum, on conclut que $i = i'$ pour $i = i_0$.

- (c) i. On a $i = i'$, donc $t = t' = S/2$ et $i = \arcsin n \sin S/2 = 40,9^\circ$.
 ii. On en déduit $D_m = 2i_0 - S = 21,8^\circ$.

4. La longueur d'onde est maximale pour le rouge, pour lequel la réfraction et donc la déviation seront minimales. On peut également utiliser la croissance des fonctions sin et arcsin sur $[0; \pi/2]$: D_m croît alors quand n croît, donc quand λ décroît : le bleu est plus dévié que le rouge.

(a) On effectue la régression linéaire de n en fonction de $1/\lambda^2$. On obtient : $n_0 = 1,301$ et $A = 2,94 \cdot 10^3 \mu\text{m}^2$. La courbe représentative de $n(\lambda)$ est représentée ci-contre.



(b) On calcule les valeurs extrémales de la déviation pour les longueurs d'onde extrémales du spectre visible : $D_{\max}(380 \text{ nm}) = 2 \arcsin(n(380) \sin(S/2)) - S = 22^\circ 42' 51''$ et $D_{\min}(750 \text{ nm}) = 2 \arcsin(n(750) \sin(S/2)) - S = 21^\circ 32' 11''$ pour $n(750) = 1,306$, soit une largeur angulaire de :

$$D_{\max} - D_{\min} = 1^\circ 10'.$$

(c) On calcule $\frac{dn}{d\lambda} = -2A/\lambda^3$. La dérivée de $\arcsin(x)$ étant $1/\sqrt{1-x^2}$, on calcule :

$$\frac{dD}{d\lambda} = \frac{dD}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{-2A}{\lambda^3} \frac{\sin(S/2)}{\sqrt{1-n^2 \sin^2(S/2)}} = -3,75 \text{ nm}^{-1}.$$

On calcule alors, en employant la formule des compositions d'incertitudes :

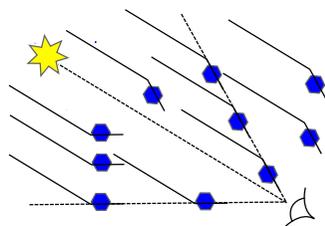
$$\Delta D = \left| \frac{dD}{d\lambda} \Delta \lambda \right| = 1,88 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 6,7'',$$

ce qui est comparable à l'ordre de grandeur obtenu à la question précédente.

(a)

Les rayons solaires parvenant à un observateur forment un faisceau quasi-collimaté. Un cristal de glace paraîtra lumineux à un observateur :

- s'il est orienté de telle sorte que l'incidence des rayons solaires soit i_0 ,
- si le rayon qu'il dévie parvient à l'œil de l'observateur.



Comme illustré sur le schéma ci-contre (sur lequel on n'a représenté que des rayons présentant la bonne incidence), les cristaux paraissant lumineux sont donc situés sur un cône d'axe la droite reliant l'observateur au soleil et de demi-angle au sommet i_0 .

(b) Comme pour l'arc-en-ciel, chaque observateur observera un cône lumineux dont son œil constitue le sommet. Néanmoins, l'observateur doit se trouver face au soleil pour observer le halo (et non lui tourner le dos). Les couleurs sont disposées différemment : le bleu est à l'extérieur pour le halo alors qu'il est à l'intérieur pour l'arc-en-ciel.